CHAPITRE III : ENSEMBLES, APPLICATIONS ET RELATIONS
Correction

a) (i) L'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ n'est pas injective car on a, par exemple, $f(-3) = f(3)$. De plus, f n'est pas surjective car, par exemple, le réel -7 n'a pas d'antécédent par f.

(ii) L'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ n'est pas surjective car, par exemple, le réel -10 n'a pas d'antécédent par f. Par contre, si $(x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$ vérifie $f(x_1) = f(x_2)$, ie $x_1^2 = x_2^2$, alors $x_1 = x_2$ car x_1 et x_2 sont positifs. Donc f est injective.

(iii) L'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ n'est pas injective car on a, par exemple, $f(-2) = f(2)$. Par contre, pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, on peut écrire $y = (-\sqrt{y})^2 = f(-\sqrt{y})$ donc f est surjective.

(iv) L'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ est surjective car pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, on peut écrire $y = (\sqrt{y})^2 = f(\sqrt{y})$. De plus, si $(x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$ vérifie $f(x_1) = f(x_2)$, ie $x_1^2 = x_2^2$, alors $x_1 = x_2$ car x_1 et x_2 sont positifs. Donc f est injective. Il s'ensuit que f est bijective.

b) On a $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$, $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$, $f([1,2]) = [1,4]$ et $f^{-1}(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}$. D'autre part, on a

$$f^{-1}([1,4]) = \big\{x \in \mathbb{R},\ x^2 \in [1,4]\big\} = [-2,-1] \cup [1,2]$$

et

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) \in \{y\}\} = \big\{x \in \mathbb{R},\ x^2 = y\big\} = \begin{cases} \{-\sqrt{y}, \sqrt{y}\} \text{ si } y > 0 \\ \{0\} \text{ si } y = 0 \\ \emptyset \text{ si } y < 0 \end{cases} .$$