CHAPITRE I : FONCTIONS USUELLES
Correction

a) On a $\ln x - x = x\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right)$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} - 1 = -1$. Par produit de limites, il s'ensuit

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x - x = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty.$$

b) On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^4}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^4}{x^{\frac{1}{2}}} = 0 \quad \text{par croissances comparées.}$$

c) D'une part, on a

$$\frac{3^x}{x^5} = \frac{e^{x\ln 3}}{x^5} = \left(\frac{e^x}{x^{\frac{5}{\ln 3}}}\right)^{\ln 3}.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{5}{\ln 3}}}{e^x} = 0^+$ donc, par composition des limites, il vient $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3^x}{x^5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x^{\frac{5}{\ln 3}}}\right)^{\ln 3} = +\infty$.
D'autre part, comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln 3} = 0$, il vient

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3^x}{x^5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x\ln 3}}{x^5} = 0.$$