CHAPITRE II : NOMBRES COMPLEXES

Correction

On linéarise $\cos 7(x)$. En utilisant les formules d'Euler, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\cos^7(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^7 = \frac{1}{2^7}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^7 \\
&= \frac{1}{2^7}\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}(e^{ix})^k(e^{-ix})^{7-k} \text{ grâce à la formule du binôme de Newton} \\
&= \frac{1}{2^7}\left[\underbrace{e^{7ix}+e^{-7ix}}_{k=7 \text{ et } k=0} + \underbrace{\binom{7}{1}\left(e^{5ix}+e^{-5ix}\right)}_{k=6 \text{ et } k=1} + \underbrace{\binom{7}{2}\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)}_{k=5 \text{ et } k=2} + \underbrace{\binom{7}{3}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)}_{k=4 \text{ et } k=3}\right] \\
&= \frac{1}{2^6}\left[\cos(7x)+7\cos(5x)+21\cos(3x)+35\cos(x)\right].
\end{aligned}$$

Par conséquent, une primitive de $x \mapsto \cos^7(x)$ est

$$x \mapsto \frac{1}{2^6}\left[\frac{1}{7}\sin(7x)+\frac{7}{5}\sin(5x)+7\sin(3x)+35\sin(x)\right].$$