CHAPITRE II : NOMBRES COMPLEXES

Correction

Il faut que $z \neq -1$ pour que Z soit bien défini.
Méthode 1 : Si $z = a + ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$Z = \frac{a+ib-1}{a+ib+1} = \frac{(a-1+ib)(a+1-ib)}{(a+1+ib)(a+1-ib)} = \frac{a^2+b^2-1+2ib}{(a+1)^2+b^2} = \frac{a^2+b^2-1}{(a+1)^2+b^2} + i\frac{2b}{(a+1)^2+b^2}.$$

Ainsi, on a

$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow \frac{2b}{(a+1)^2+b^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Im}(z) = 0 \\ \mathrm{Re}(z) \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$$

et

$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2-1}{(a+1)^2+b^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = 1 \\ z \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ z \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}\backslash\{-1\}.$$

Méthode 2 : Pour $z \neq -1$, on a

$$\begin{aligned} Z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \overline{Z} = Z \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)} = \frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow \frac{\overline{z-1}}{\overline{z+1}} = \frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow \frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1} = \frac{z-1}{z+1} \\ &\Leftrightarrow (z+1)(\overline{z}-1) = (z-1)(\overline{z}+1) \Leftrightarrow z\overline{z} - z + \overline{z} - 1 = z\overline{z} + z - \overline{z} - 1 \Leftrightarrow z = \overline{z} \\ &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

De même, pour $z \neq -1$, on a

$$\begin{aligned} Z \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow \overline{Z} = -Z \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)} = -\frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow \frac{\overline{z-1}}{\overline{z+1}} = -\frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow \frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1} = -\frac{z-1}{z+1} \\ &\Leftrightarrow (z+1)(\overline{z}-1) = -(z-1)(\overline{z}+1) \Leftrightarrow z\overline{z} - z + \overline{z} - 1 = -z\overline{z} - z + \overline{z} + 1 \Leftrightarrow z\overline{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}. \end{aligned}$$