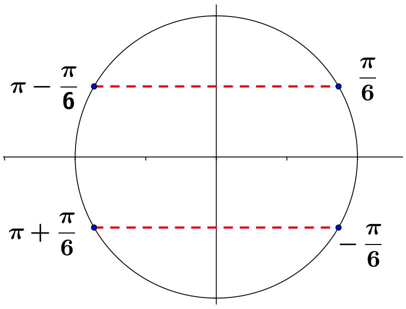
CHAPITRE II : NOMBRES COMPLEXES

Correction

Si $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ alors $|z|^2 = 1$ donc $|z| = 1$. On écrit alors $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Il s'ensuit

$$\begin{aligned}
|z| = |1-z| &\Leftrightarrow \left|1 - e^{i\theta}\right| = 1 \\
&\Leftrightarrow \left|e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)\right| = 1 \\
&\Leftrightarrow \left|-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}\right| = 1 \\
&\Leftrightarrow \left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Or, les solutions modulo 2π de l'équation $|\sin x| = \frac{1}{2}$ sont $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$, $\pi + \frac{\pi}{6}$ et $\pi - \frac{\pi}{6}$.



Il s'ensuit

$$\begin{aligned}
|z| = |1-z| &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\quad \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ou } k \in \mathbb{Z},\quad \frac{\theta}{2} = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\quad \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } k \in \mathbb{Z},\quad \theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow z = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ou } z = e^{-i\frac{\pi}{3}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, les complexes z vérifiant $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1-z|$ sont $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{3}}$.