

CHAPITRE II : NOMBRES COMPLEXES

Correction

La fonction $z \mapsto (1 + i \tan \alpha)z - i \tan \alpha$ est de la forme $z \mapsto az + b$ donc il s'agit de l'étude d'une similitude directe.

- Cas $\alpha = 0$. Dans ce cas, on a $1 + i \tan \alpha = 1$ donc $z \mapsto (1 + i \tan \alpha)z - i \tan \alpha = z$ est la fonction identité.
- Cas $\alpha \neq 0$. Dans ce cas, on a $1 + i \tan \alpha \neq 1$. On recherche le point invariant. On a

$$(1 + i \tan \alpha)z - i \tan \alpha = z \Leftrightarrow z = 1$$

puis, avec $z' = (1 + i \tan \alpha)z - i \tan \alpha$, on écrit

$$z' - 1 = (1 + i \tan \alpha)(z - 1) = \frac{1}{\cos \alpha}(\cos \alpha + i \sin \alpha)(z - 1) = \frac{1}{\cos \alpha}e^{i\alpha}(z - 1).$$

La transformation est la composée commutative d'une rotation de centre le point Ω d'affixe 1 et d'angle θ et de l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{1}{\cos \alpha}$.