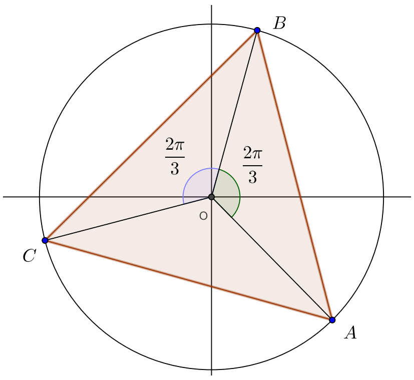
CHAPITRE II : NOMBRES COMPLEXES
Correction

a) On représente la situation considérée sur le graphique ci-dessous.



Le point B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ donc $b = ae^{\frac{2i\pi}{3}} = aj$. Le point C est l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ donc $c = be^{\frac{2i\pi}{3}} = bj = aj^2$.

b) Soit $u \in \mathbb{C}$ avec $u \neq 1$. Les affixes de $S(B)$ et $S(C)$ sont respectivement ub et uc.

$$\begin{aligned}
A,\ S(B),\ S(C) \text{ alignés} &\Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{AS(B)}, \overrightarrow{AS(C)}}) \equiv 0[\pi] \\
&\Leftrightarrow \frac{uc-a}{ub-a} \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \frac{(uj^2-1)a}{(uj-1)a} \in \mathbb{R} \text{ en utilisant le résultat de la question 1,} \\
&\Leftrightarrow \frac{uj^2-1}{uj-1} \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{uj^2-1}{uj-1}\right)} = \frac{uj^2-1}{uj-1} \\
&\Leftrightarrow \frac{\bar{u}j-1}{\bar{u}j^2-1} = \frac{uj^2-1}{uj-1} \text{ car } \bar{j} = j^2 \text{ et } \overline{j^2} = j, \\
&\Leftrightarrow (\bar{u}j-1)(uj-1) = (uj^2-1)(\bar{u}j^2-1) \\
&\Leftrightarrow u\bar{u}j^2 - \bar{u}j - uj + 1 = u\bar{u}j^4 - uj^2 - \bar{u}j^2 + 1 \\
&\Leftrightarrow u\bar{u}j^2 - \bar{u}j - uj = u\bar{u}j - uj^2 - \bar{u}j^2 \text{ car } j^3 = 1 \text{ et } j^4 = j, \\
&\Leftrightarrow j(j-1)(u\bar{u} + u + \bar{u}) = 0 \\
&\Leftrightarrow u\bar{u} + u + \bar{u} = 0.
\end{aligned}$$

c) Soit $u = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} u + \overline{u} + u\overline{u} = 0 &\Leftrightarrow 2Re(u) + |u|^2 = 0 \Leftrightarrow 2a + a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow u \text{ appartient au cercle de centre le point } (1, 0) \text{ et de rayon } 1. \end{aligned}$$