CHAPITRE II : NOMBRES COMPLEXES

Correction

On remarque d'ores et déjà que $z = 0$ est solution. On recherche désormais les solutions non nulles. On écrit $z \in \mathbb{C}^*$ sous forme trigonométrique. Il existe $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = \rho e^{i\theta}$. Dès lors

$$\overline{z} = z^3 \Leftrightarrow \rho e^{-\theta} = \rho^3 e^{3i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \rho^3 \\ -\theta \equiv 3\theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho(\rho-1)(\rho+1) = 0 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ -\theta = 3\theta + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1(\text{ car } \rho > 0) \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = k\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow z \in \{1, i, -1, -i\}.$$

Par conséquent, les solutions complexes de l'équation $\overline{z} = z^3$ sont 0, 1, i, -1 et $-i$.