CHAPITRE II : NOMBRES COMPLEXES
Correction

Méthode 1 : On remarque que

$$u = 1 + e^{i\varphi} = e^{i\frac{\varphi}{2}}\left(e^{i\frac{-\varphi}{2}} + e^{i\frac{\varphi}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)e^{i\frac{\varphi}{2}}.$$

On a $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}[$ donc $0 \leqslant \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{4}$ et en particulier, on a $\cos\frac{\varphi}{2} > 0$. On a bien écrit u sous forme trigonométrique.

Méthode 2 : En utilisant la formule de duplication $\cos\varphi = 2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 1$, on obtient

$$|u| = \sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2} = \sqrt{2(1+\cos\varphi)} = \sqrt{2\cdot 2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = 2\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|.$$

On a $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}[$ donc $0 \leqslant \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{4}$ et en particulier, on a $\cos\frac{\varphi}{2} > 0$. On peut alors réécrire

$$\begin{aligned} u &= 2\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)\left[\frac{1+\cos\varphi}{2\cos\frac{\varphi}{2}} + i\frac{\sin\varphi}{2\cos\frac{\varphi}{2}}\right] \\ &= 2\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)\left[\frac{2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{2\cos\frac{\varphi}{2}} + i\frac{2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{2\cos\frac{\varphi}{2}}\right] \\ &= 2\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)\left[\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right] = 2\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right|e^{i\frac{\varphi}{2}}. \end{aligned}$$

La dernière relation correspond à la forme trigonométrique de u. On en déduit $arg(u) \equiv \frac{\varphi}{2}[2\pi]$.

On a

$$|v| = |1 + i\tan\varphi|^2 = 1 + (\tan\varphi)^2 = \frac{1}{(\cos\varphi)^2}.$$

On peut ainsi réécrire

$$v = (1 + i\tan\varphi)^2 = \frac{1}{(\cos\varphi)^2}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \frac{1}{(\cos\varphi)^2}\left(e^{i\varphi}\right)^2 = \frac{1}{(\cos\varphi)^2}e^{2i\varphi}.$$

La dernière relation correspond à la forme trigonométrique de v. Il s'ensuit que $arg(v) \equiv 2\varphi[2\pi]$.