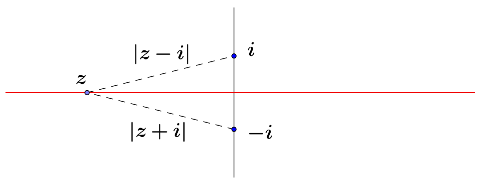
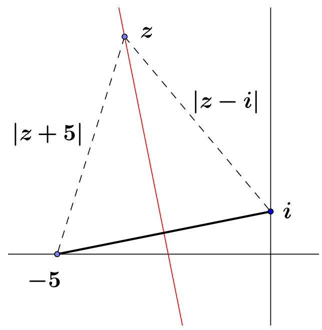
CHAPITRE II : NOMBRES COMPLEXES

Correction

On commence par aborder ces questions géométriquement. En interprétant les modules comme des distances entre deux points, on conjecture (en rouge) les solutions à ces équations.





Soit $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} |z-i| = |z+i| &\Leftrightarrow |z-i|^2 = |z+i|^2 \Leftrightarrow |a+i(b-1)|^2 = |a+i(b+1)|^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 + (b-1)^2 = a^2 + (b+1)^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2b + 1 = a^2 + b^2 + 2b + 1 \\ &\Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} |z+5| = |z-i| &\Leftrightarrow |z+5|^2 = |z-i|^2 \Leftrightarrow |a+5+ib|^2 = |a+i(b-1)|^2 \\ &\Leftrightarrow (a+5)^2 + b^2 = a^2 + (b-1)^2 \Leftrightarrow a^2 + 10a + 25 + b^2 = a^2 + b^2 - 2b + 1 \\ &\Leftrightarrow 10a + 2b + 24 = 0 \Leftrightarrow b = -5a - 12. \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions à l'équation $|z-i| = |z+i|$ sont les complexes associés aux points se trouvant sur la droite réelle et les solutions à l'équation $|z-i| = |z+5|$ sont les complexes associés aux points se trouvant sur la droite d'équation $y = -5x - 12$. On trouve les résultats conjecturés précédemment.