CHAPITRE II : NOMBRES COMPLEXES
Correction

On a d'une part

$$(|\text{Re}(z)| + |\text{Im}(z)|)^2 = |\text{Re}(z)|^2 + |\text{Im}(z)|^2 + \underbrace{2|\text{Re}(z)||\text{Im}(z)|}_{\geqslant 0} \geqslant |\text{Re}(z)|^2 + |\text{Im}(z)|^2 = |z|^2$$

de quoi l'on tire $|z| \leqslant |\text{Re}(z)| + |\text{Im}(z)|$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}(|\text{Re}(z)| - |\text{Im}(z)|)^2 \geqslant 0 &\Leftrightarrow |\text{Re}(z)|^2 + |\text{Im}(z)|^2 - 2|\text{Re}(z)||\text{Im}(z)| \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow 2|\text{Re}(z)||\text{Im}(z)| \leqslant |\text{Re}(z)|^2 + |\text{Im}(z)|^2.\end{aligned}$$

de quoi l'on déduit

$$(|\text{Re}(z)| + |\text{Im}(z)|)^2 = |\text{Re}(z)|^2 + |\text{Im}(z)|^2 + 2|\text{Re}(z)||\text{Im}(z)| \leqslant 2(|\text{Re}(z)|^2 + |\text{Im}(z)|^2) = 2|z|^2.$$

Il s'ensuit

$$\frac{|\text{Re}(z)| + |\text{Im}(z)|}{\sqrt{2}} \leqslant |z|.$$