CHAPITRE I : FONCTIONS USUELLES

Correction

Pour cet exercice, on commence par étudier les variations de la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.
Pour tout réel $x > 0$, en appliquant la formule de dérivation d'un quotient, on obtient

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

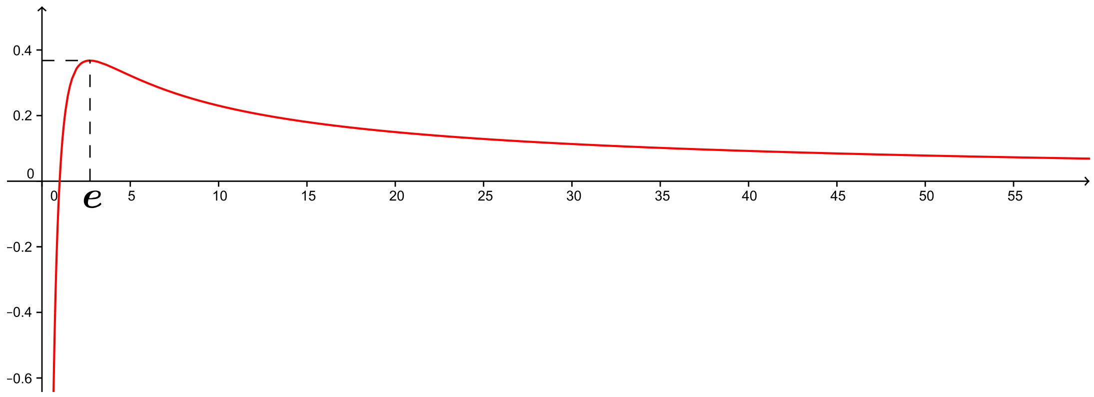
On a $1 - \ln x \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln x \leqslant 1 \Leftrightarrow x \leqslant e$. Par ailleurs, on a $g(e) = \frac{1}{e}$ et d'après les croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et on a

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} x = 0^+ \text{ donc } \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty.$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

On est alors en mesure de donner une représentation graphique de la courbe représentative de la fonction g.



a) Méthode 1 : On raisonne par équivalences. La fonction ln étant croissante sur $]0,+\infty[$, on a

$$e^\pi \geqslant \pi^e \Leftrightarrow \pi \ln e \geqslant e \ln \pi \Leftrightarrow g(e) \geqslant g(\pi).$$

Or $\pi \approx 3,141 \geqslant e \approx 2,718$ et la fonction g est décroissante sur $[e,+\infty[$ donc $g(\pi) \leqslant g(e)$. Par conséquent, on a

$$e^\pi \geqslant \pi^e.$$

Méthode 2 : On applique l'inégalité $e^x \geqslant x+1$ au réel $x = \frac{\pi}{e} - 1$. Il vient

$$e^{\frac{\pi}{e}-1} \geqslant \frac{\pi}{e} \Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{e}} \geqslant \pi \Leftrightarrow \left(e^{\frac{\pi}{e}}\right)^e \geqslant \pi^e \Leftrightarrow e^\pi \geqslant \pi^e.$$

b) Analyse : On considère un couple d'entier (a,b) avec $2 \leqslant a < b$. On

$$a^b = b^a \Leftrightarrow b \ln a = a \ln b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b} \Leftrightarrow g(a) = g(b).$$

Comme a et b sont distincts, les variations de g imposent $a \in]0,e[$ et $b \in]e,+\infty[$. La seule valeur entière $a \geqslant 2$ dans $]0,e[$ est $a = 2$. L'équation $g(a) = g(b)$ se réécrit $g(b) = \frac{\ln b}{b} = \frac{\ln 2}{2} = g(2)$ et, la fonction g étant strictement décroissante sur $]e,+\infty[$, cette équation admet au plus une solution. Par ailleurs, la valeur $b = 4$ en est solution puisque $g(b) = \frac{\ln(2^2)}{2\times 2} = \frac{\ln 2}{2}$. Par conséquent, la seule valeur possible est $b = 4$.
On vient d'établir que, s'il existe des entiers a et b qui conviennent, il ne peut s'agir que de $a = 2$ et $b = 4$.
Synthèse : On pose $a = 2$ et $b = 4$. On a $a^b = 2^4 = 16 = 4^2 = b^a$.
Par conséquent, le seul couple d'entier (a,b) avec $2 \leqslant a < b$ tel que $a^b = b^a$ est le couple $(a,b) = (2,4)$.