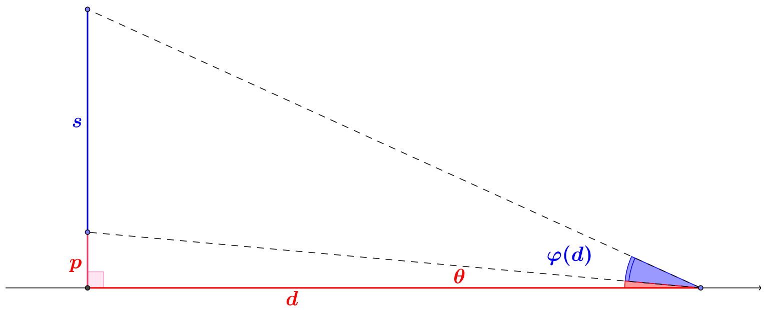
CHAPITRE I : FONCTIONS USUELLES

Correction

On introduit les angles θ et $\varphi(d)$ orientés dans le sens direct et représentés sur le schéma ci-dessous représentant la situation considérée.



On a $\tan\theta = \dfrac{p}{d}$ et $\tan(\varphi(d)+\theta) = \dfrac{s+p}{d}$ donc

$$\varphi(d) = (\varphi(d)+\theta) - \theta = \arctan\left(\frac{s+p}{d}\right) - \arctan\left(\frac{p}{d}\right).$$

On étudie la fonction $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ d \longmapsto \arctan\left(\frac{s+p}{d}\right) - \arctan\left(\frac{p}{d}\right) \end{cases}$. Étant donné que $\lim\limits_{t\to 0} \arctan t = 0$, on a $\lim\limits_{d\to+\infty} \arctan\left(\frac{s+p}{d}\right) - \arctan\left(\frac{p}{d}\right) = 0 - 0 = 0$. Par ailleurs, étant donné que $\lim\limits_{t\to+\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}$, on a $\lim\limits_{d\to 0^+} \arctan\left(\frac{s+p}{d}\right) - \arctan\left(\frac{p}{d}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$.

En tant que composée et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$, la fonction φ est dérivable et, pour tout $d > 0$, on a

$$\varphi'(d) = \frac{-\frac{s+p}{d^2}}{1+\left(\frac{s+p}{d}\right)^2} + \frac{\frac{p}{d^2}}{1+\left(\frac{p}{d}\right)^2} = \frac{p}{d^2+p^2} - \frac{s+p}{d^2+(s+p)^2}.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
\varphi'(d) \geqslant 0 &\Leftrightarrow \frac{p}{d^2+p^2} \geqslant \frac{s+p}{d^2+(s+p)^2} \\
&\Leftrightarrow \frac{d^2+p^2}{p} \leqslant \frac{d^2+(s+p)^2}{s+p} \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{s+p}\right) d^2 \leqslant s \\
&\Leftrightarrow d^2 \leqslant p(s+p) \\
&\Leftrightarrow d \leqslant \sqrt{p(s+p)}.
\end{aligned}$$

On en déduit le tableau de variation suivant où l'on a posé $\varphi(\sqrt{p(s+p)}) = \varphi_{\max}$.

	0		$\sqrt{p(s+p)}$		π
φ'		$+$	0	$-$	
φ		$\nearrow$	$\varphi_{\max}$	$\searrow$	
	0				0

Ainsi, l'observateur doit se situer à une distance du pied du socle égale à $\sqrt{p(s+p)}$ pour voir la statue sous un angle maximal.