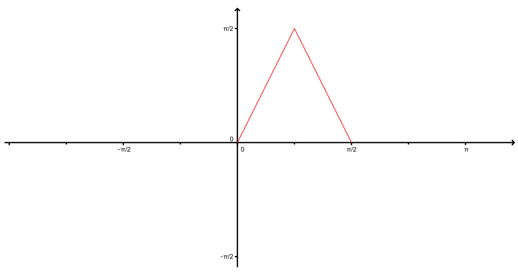
CHAPITRE I : FONCTIONS USUELLES
Correction

1. Les fonctions sin et arcsin étant impaires, pour tout réel t, on peut écrire
$$\varphi(-t) = \arcsin(\sin(-2t)) = \arcsin(-\sin(2t)) = -\arcsin(\sin(2t)) = -\varphi(t).$$
Par conséquent, la fonction φ est impaire.
La fonction sin étant 2π-périodique, pour tout réel t, on peut écrire
$$\varphi(t+\pi) = \arcsin(\sin(2t+2\pi)) = \arcsin(\sin(2t)) = \varphi(t).$$
Par conséquent, la fonction φ est π-périodique.

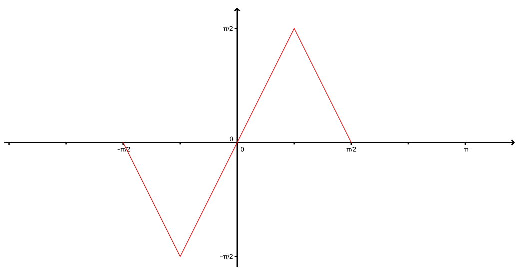
2. Soit $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ de telle sorte que $2t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Or
$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin(\sin x) = x.$$
Donc
$$\varphi(t) = \arcsin(\sin(2t)) = 2t.$$

3. Soit $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ de telle sorte que $2t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ et $\pi - 2t = \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Par conséquent, on obtient
$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \arcsin(\sin(2t)) \\ &= \arcsin(\sin(\pi - 2t)) \text{ car } \forall x \in \mathbb{R},\ \sin(\pi - x) = \sin x, \\ &= \pi - 2t \text{ car } \pi - 2t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].\end{aligned}$$
Donc $\varphi(t) = \pi - 2t$.

4. Grâce aux questions 2 et 3, on trace φ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. On obtient :



La fonction φ étant impaire, on complète ce tracé sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ en effectuant une symétrie de centre 0. On obtient



La fonction φ étant π-périodique, on complète le tracé sur $\mathbb{R}$ par translation. On obtient