CHAPITRE I : FONCTIONS USUELLES
Correction

a) On a d'une part

$$\forall a \in \mathbb{R}^*,\ \text{th}(a) = \frac{\text{sh}(a)}{\text{ch}(a)} = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}},$$

et d'autre part, $\forall a \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\text{th}(2a)} - \frac{1}{\text{th}(a)} &= \frac{2(e^{2a}+e^{-2a})}{e^{2a}-e^{-2a}} - \frac{e^a+e^{-a}}{e^a-e^{-a}} = \frac{2(e^{2a}+e^{-2a})}{(e^a-e^{-a})(e^a+e^{-a})} - \frac{(e^a+e^{-a})^2}{(e^a-e^{-a})(e^a+e^{-a})} \\
&= \frac{2(e^{2a}+e^{-2a})-(e^a+e^{-a})^2}{(e^a-e^{-a})(e^a+e^{-a})} = \frac{e^{2a}-2+e^{-2a}}{(e^a-e^{-a})(e^a+e^{-a})} = \frac{(e^a-e^{-a})^2}{(e^a-e^{-a})(e^a+e^{-a})} \\
&= \frac{e^a-e^{-a}}{e^a+e^{-a}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\forall a \in \mathbb{R}^*,\quad \text{th}(a) = \frac{2}{\text{th}(2a)} - \frac{1}{\text{th}(a)}.$$

b) En utilisant la relation établie lors de la question précédente, on obtient

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \text{th}(2^k) = \sum_{k=0}^{n} 2^k \left(\frac{2}{\text{th}(2^{k+1})} - \frac{1}{\text{th}(2^k)} \right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2^{k+1}}{\text{th}(2^{k+1})} - \frac{2^k}{\text{th}(2^k)} \right).$$

On reconnait alors une somme télescopique, soit en remarquant

$$\begin{aligned}
S_n &= \underbrace{\frac{2^{n+1}}{\text{th}(2^{n+1})} - \frac{2^n}{\text{th}(2^n)}}_{\text{pour } k=n} + \underbrace{\frac{2^n}{\text{th}(2^n)} - \frac{2^{n-1}}{\text{th}(2^{n-1})}}_{\text{pour } k=n-1} + \dots + \underbrace{\frac{2^2}{\text{th}(2^2)} - \frac{2^1}{\text{th}(2^1)}}_{\text{pour } k=1} + \underbrace{\frac{2^1}{\text{th}(2^1)} - \frac{2^0}{\text{th}(2^0)}}_{\text{pour } k=0} \\
&= \frac{2^{n+1}}{\text{th}(2^{n+1})} - \frac{2^0}{\text{th}(2^0)} \\
&= \frac{2^{n+1}}{\text{th}(2^{n+1})} - \frac{1}{\text{th}(1)},
\end{aligned}$$

soit en procédant à un changement d'indice

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{\text{th}(2^{k+1})} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{\text{th}(2^k)} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{\text{th}(2^k)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{\text{th}(2^k)} = \frac{2^{n+1}}{\text{th}(2^{n+1})} - \frac{2^0}{\text{th}(2^0)} = \frac{2^{n+1}}{\text{th}(2^{n+1})} - \frac{1}{\text{th}(1)}.$$