CHAPITRE I : FONCTIONS USUELLES
Correction

Dans le cas où $b=0$, on peut immédiatement écrire

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{ch}(a)=n\mathrm{ch}(a)\quad\text{et}\quad T_n=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{sh}(a)=n\mathrm{sh}(a).$$

Traitons désormais le cas général où $b\neq 0$. Pour tout entier $k\in[\![0,n-1]\!]$, on peut écrire

$$\mathrm{ch}(a+bk)=\frac{e^{a+bk}+e^{-(a+bk)}}{2}=\frac{e^a}{2}(e^b)^k+\frac{e^{-a}}{2}(e^{-b})^k$$

et

$$\mathrm{sh}(a+bk)=\frac{e^{a+bk}-e^{-(a+bk)}}{2}=\frac{e^a}{2}(e^b)^k-\frac{e^{-a}}{2}(e^{-b})^k.$$

Par conséquent, on peut réécrire

$$S_n=\frac{e^a}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(e^b)^k+\frac{e^{-a}}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{-b})^k\quad\text{et}\quad T_n=\frac{e^a}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(e^b)^k-\frac{e^{-a}}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{-b})^k.$$

Or, pour tout réel q, on sait

$$1+q+\cdots+q^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}q^k=\begin{cases}\frac{1-q^n}{1-q}\text{ si } q\neq 1\\ n\text{ si } q=1.\end{cases}$$

Comme $b\neq 0$, on a $e^b\neq 1$ et $e^{-b}\neq 1$. On peut ainsi écrire

$$\sum_{k=0}^{n-1}(e^b)^k=\frac{1-(e^b)^n}{1-e^b}=\frac{e^{nb}-1}{e^b-1}=\frac{e^{\frac{nb}{2}}}{e^{\frac{b}{2}}}\frac{e^{\frac{nb}{2}}-e^{-\frac{nb}{2}}}{e^{\frac{b}{2}}-e^{-\frac{b}{2}}}=e^{(n-1)\frac{b}{2}}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{nb}{2}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{b}{2}\right)}$$

et

$$\sum_{k=0}^{n-1}(e^{-b})^k=\frac{1-(e^{-b})^n}{1-e^{-b}}=\frac{1-e^{-nb}}{1-e^{-b}}=\frac{e^{-\frac{nb}{2}}}{e^{-\frac{b}{2}}}\frac{e^{\frac{nb}{2}}-e^{-\frac{nb}{2}}}{e^{\frac{b}{2}}-e^{-\frac{b}{2}}}=e^{-(n-1)\frac{b}{2}}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{nb}{2}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{b}{2}\right)}.$$

Ainsi, si $b\neq 0$, on peut réécrire

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{e^a}{2}e^{(n-1)\frac{b}{2}}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{nb}{2}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{b}{2}\right)}+\frac{e^{-a}}{2}e^{-(n-1)\frac{b}{2}}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{nb}{2}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{b}{2}\right)}=\frac{e^{a+(n-1)\frac{b}{2}}+e^{-(a+(n-1)\frac{b}{2})}}{2}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{nb}{2}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{b}{2}\right)}\\&=\frac{\mathrm{ch}\left(a+(n-1)\frac{b}{2}\right)\mathrm{sh}\left(n\frac{b}{2}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{b}{2}\right)}\\ \text{et } T_n&=\frac{e^a}{2}e^{(n-1)\frac{b}{2}}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{nb}{2}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{b}{2}\right)}-\frac{e^{-a}}{2}e^{-(n-1)\frac{b}{2}}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{nb}{2}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{b}{2}\right)}=\frac{e^{a+(n-1)\frac{b}{2}}-e^{-(a+(n-1)\frac{b}{2})}}{2}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{nb}{2}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{b}{2}\right)}\\&=\frac{\mathrm{sh}\left(a+(n-1)\frac{b}{2}\right)\mathrm{sh}\left(n\frac{b}{2}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{b}{2}\right)}.\end{aligned}$$