CHAPITRE I : FONCTIONS USUELLES

Correction

a) On a
$$\text{ch}x = 2 \Leftrightarrow e^x + e^{-x} = 4 \Leftrightarrow e^{2x} + 1 = 4e^x \Leftrightarrow (e^x)^2 - 4e^x + 1 = 0.$$
Or, en calculant son discriminant, on montre que l'équation $X^2 - 4X + 1 = 0$ possède deux racines réelles qui sont $2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$. On remarque d'ores et déjà que ces deux racines sont strictement positives. On peut ainsi factoriser le polynôme précédent sous la forme
$$X^2 - 4X + 1 = (X - (2 + \sqrt{3}))(X - (2 - \sqrt{3})).$$
Il s'ensuit
$$\begin{aligned}\text{ch}x = 2 &\Leftrightarrow (e^x - (2 + \sqrt{3}))(e^x - (2 - \sqrt{3})) = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 + \sqrt{3} \text{ ou } e^x = 2 - \sqrt{3}\\ &\Leftrightarrow x = \ln(2 + \sqrt{3}) \text{ ou } x = \ln(2 - \sqrt{3}).\end{aligned}$$
L'équation $\text{ch}x = 2$ possède deux solutions qui sont $\ln(2 + \sqrt{3})$ et $\ln(2 - \sqrt{3})$.

b) On a
$$5\text{ch}(x) - 4\text{sh}(x) = 3 \Leftrightarrow 5(e^x + e^{-x}) - 4(e^x - e^{-x}) = 6 \Leftrightarrow e^x + 9e^{-x} = 6 \Leftrightarrow e^{2x} - 6e^x + 9 = 0.$$
Or on remarque l'identité remarquable $X^2 - 6X + 9 = (X - 3)^2$ qui permet de factoriser rapidement ce polynôme. Il s'ensuit
$$5\text{ch}(x) - 4\text{sh}(x) = 3 \Leftrightarrow (e^x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3.$$
L'équation $5\text{ch}(x) - 4\text{sh}(x) = 3$ possède une unique solution qui est $\ln 3$.

c) On a
$$2\text{sh}(x) + \text{ch}(x) = 5 \Leftrightarrow 2(e^x - e^{-x}) + e^x + e^{-x} = 10 \Leftrightarrow 3e^x - e^{-x} = 10 \Leftrightarrow 3e^{2x} - 10e^x - 1 = 0.$$
Or, en calculant le discriminant du polynôme $3X^2 - 10X - 1$, on montre que l'équation $3X^2 - 10X - 1 = 0$ possède deux solutions qui sont $\frac{5+2\sqrt{7}}{3} > 0$ et $\frac{5-2\sqrt{7}}{3} < 0$. On peut ainsi factoriser le polynôme précédent sous la forme
$$3X^2 - 10X - 1 = 3\left(X - \frac{5 + 2\sqrt{7}}{3}\right)\left(X - \frac{5 - 2\sqrt{7}}{3}\right).$$
Il s'ensuit
$$\begin{aligned}2\text{sh}(x) + \text{ch}(x) = 5 &\Leftrightarrow 3\left(e^x - \frac{5 + 2\sqrt{7}}{3}\right)\left(e^x - \frac{5 - 2\sqrt{7}}{3}\right)\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e^x = \frac{5+2\sqrt{7}}{3} \\ \text{ou} \\ e^x = \frac{5-2\sqrt{7}}{3} \text{ impossible car } e^x \text{ est toujours strictement positif}\end{cases}\\ &\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{5 + 2\sqrt{7}}{3}\right).\end{aligned}$$
L'équation $2\text{sh}(x) + \text{ch}(x) = 5$ possède une unique solution qui est $\ln\left(\frac{5+2\sqrt{7}}{3}\right)$.