

CHAPITRE I : FONCTIONS USUELLES

Correction

Soit $x > 0$. On a

$$\begin{aligned}(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}} &\Leftrightarrow e^{x \ln \sqrt{x}} = e^{\sqrt{x} \ln x} \Leftrightarrow x \ln \sqrt{x} = \sqrt{x} \ln x \Leftrightarrow \frac{1}{2}x \ln x = \sqrt{x} \ln x \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right) \ln x = 0 \quad \text{car } x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \text{ ou } \ln x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = 1.\end{aligned}$$

Les réels 1 et 4 sont les seules solutions de l'équation $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$.