CHAPITRE I : FONCTIONS USUELLES
Correction

a) En factorisant par $\ln x$, on peut écrire

$$8\ln^3 x - 9\ln^2 x + \ln x = \ln x \cdot \left(8\ln^2 x - 9\ln x + 1\right) = 8\ln x \cdot \left(\ln x - \frac{1}{8}\right) \cdot (\ln x - 1)\,.$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned} 8\ln^3 x - 9\ln^2 x + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x\left(\ln x - \frac{1}{8}\right)(\ln x - 1) &\Leftrightarrow \ln x = 0 \text{ ou } \ln x = \frac{1}{8} \text{ ou } \ln x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = e^{\frac{1}{8}} \text{ ou } x = e. \end{aligned}$$

b) En multipliant chacun des membres de cette égalité par e^x, il vient

$$e^x - 2e^{-x} = 1 \Leftrightarrow e^{2x} - 2 = e^x \Leftrightarrow (e^x)^2 - e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow (e^x - 2)(e^x + 1) = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \text{ ou } e^x = -1.$$

La fonction exponentielle prenant des valeurs toujours strictement positives, la condition $e^x = -1$ est impossible. Il s'ensuit

$$e^x - 2e^{-x} = 1 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2.$$

c) La présence du terme $\ln x$ nécessite $x > 0$ pour que l'on puisse légitimement considérer cette équation. Par ailleurs, pour $x > 0$, on a $\ln e^x + e^{-\ln x} > 0$ en tant que somme de deux termes strictement positifs. Par conséquent, la condition $x > 0$ est également suffisante pour pouvoir considérer l'équation proposée. Soit $x > 0$, on a

$$\ln e^x + e^{-\ln x} = \ln e^x + e^{\ln\frac{1}{x}} = x + \frac{1}{x}.$$

Par conséquent, il vient

$$\begin{aligned} &\ln\left(\ln e^x + e^{-\ln x}\right) = 1 - \ln x \Leftrightarrow \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) = \ln\frac{e}{x} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{e}{x} \Leftrightarrow x^2 = e - 1 \\ \Leftrightarrow &x = \sqrt{e-1} \text{ car } x > 0. \end{aligned}$$

d) On a $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 2^x(1 + 2 + 2^2 + 2^3) = 2^x \cdot 15$ et $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 3^x(1 + 3 + 3^2 + 3^3) = 3^x \cdot 40$. Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} &2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} \Leftrightarrow 2^x \cdot 15 = 3^x \cdot 40 \Leftrightarrow 2^x \cdot 3 = 3^x \cdot 8 \\ \Leftrightarrow &x\ln 2 + \ln 3 = x\ln 3 + \ln 8 \Leftrightarrow x(\ln 3 - \ln 2) = \ln 3 - 3\ln 2 \Leftrightarrow x = -\frac{3\ln 2 - \ln 3}{\ln 3 - \ln 2}. \end{aligned}$$

e) On a

$$\begin{aligned} &3^{2x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1} \Leftrightarrow 3^{2x}\left(1 + \frac{1}{3}\right) = 2^x\left(2^{\frac{7}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}\right) \Leftrightarrow 3^{2x} \cdot \frac{4}{3} = 2^x \cdot 9\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow &2x\ln 3 + \ln\frac{4}{3} = x\ln 2 + \ln(9\sqrt{2}) \Leftrightarrow x(2\ln 3 - \ln 2) = 3\ln 3 - \frac{3}{2}\ln 2 = \frac{3}{2}(2\ln 3 - \ln 2) \\ \Leftrightarrow &x = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$