CHAPITRE 0 : RENTRÉE

Correction

On a

$$\prod_{k=1}^{n} 2^k = 2 \times 2^2 \times 2^3 \times \cdots \times 2^{n-1} \times 2^n = 2^{1+2+3+\cdots+(n-1)+n}$$
$$= 2^{\sum\limits_{k=1}^{n} k} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

On a

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

On peut également rédiger

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right) = \frac{\prod\limits_{k=2}^{n}(k-1)}{\prod\limits_{k=2}^{n} k} = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n-1} j}{\prod\limits_{k=2}^{n} k} = \frac{1}{n}.$$

De même, on a

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{\prod\limits_{k=2}^{n}(k+1)}{\prod\limits_{k=2}^{n} k} = \frac{\prod\limits_{j=3}^{n+1} j}{\prod\limits_{k=2}^{n} k} = \frac{n+1}{2}$$

(les facteurs pour $j = n+1$ et $k = 2$ ne se simplifiant pas).

En utilisant les résultats précédents, on a immédiatement

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\frac{k+1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right)\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)$$
$$= \frac{1}{n}\frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$